Aula 17

Teoria Qualitativa de EDOs

Determinismo e Previsibilidade

- Existência de soluções
- Unicidade de soluções
- Dependência contínuas nas condições iniciais
- Estabilidade

- <u>2ª Lei de Newton (Mecânica Clássica)</u>:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, t),$$

Solução: $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- <u>Equação de Schrödinger (Mecânica Quântica)</u>:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\phi + V\phi,$$

Solução: $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- <u>Equações de Navier-Stokes (Mecânica dos Fluidos)</u>:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} \end{aligned}$$

Solução: $\mathbf{v}(t, x, y, z), p(t, x, y, z)$

- <u>Equações de Einstein (Relatividade Geral)</u>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Solução: Variedade lorentziana 4 dimensões (espaço-tempo) descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$

Teorema (Peano): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, dado $(t_0, \mathbf{y_0}) \in \Omega$, existe solução do problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad (t_0, \mathbf{y}_0).$$

Mas não é possível garantir unicidade...

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{|y|}$$

Proposição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Então existe solução de classe $C^1(I)$ do problema de valor inicial, nalgum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $t_0 \in I$, para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

se e só se existe uma solução contínua $C(I)$ da equação integral

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))ds.$$

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Chamam-se **iterações de Picard** do problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

à sucessão de funções definida recursivamente a partir de $\mathbf{y_0}(t) = \mathbf{y}_0$ e, para $k \geq 1$, por

$$\frac{d\mathbf{y_k}}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y_{k-1}}(t)), \qquad \mathbf{y_k}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

ou, equivalentemente

$$\mathbf{y_k}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y_{k-1}}(s)) ds.$$